

II заочный тур. 8-9 классы.

1. Есть 100 комнат и 100 мальчиков, каждый из которых находится в одной из комнат. На двери каждой комнаты написано: “Тут ровно один мальчик”. Назовём комнату нечётной, если в ней находится нечётное число мальчиков. Найдите количество нечётных комнат, если известно, что среди надписей на комнатах — ровно четыре неверных.(1)

2. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$. Докажите, что $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$. (2)

3. Собрались несколько рыцарей и лжецов, все разного роста (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: “Среди тех, кто выше меня, есть лжецы”. Сколько лжецов могло быть среди них?(1)

4. Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.(3)

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки P и Q . Биссектрисы углов APQ и PQC пересекаются в точке K внутри треугольника. Оказалось, что $KA < KP < KQ < KC$. Докажите, что $AB < BC$.(2)

6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC построен квадрат $BCDE$ вершинами наружу. AN — высота треугольника ABC , точка M на луче AN такова, что $AM = BC$. Через точку B провели прямую l , $l \parallel DM$, а через точку C — прямую $s \parallel EM$. Докажите, что прямые l и s пересекаются на прямой AN .(4)

7. Вася перемножил все нечетные натуральные числа, меньшие тысячи. Какая цифра стоит у произведения в разряде десятков?(4)

8. Треугольник разрезали на два треугольника. При каком наибольшем k среди шести углов этих двух треугольников может оказаться k одинаковых?(1)

9. На наибольшей стороне AC треугольника ABC отложили отрезки $AD = AB$ и $CE = BC$. Какая из сторон треугольника BDE — наименьшая?(2)

10. Из числа 13^{2009} вычли наибольший его делитель, не равный самому числу. Из полученной разности также вычли наибольший её делитель, не равный ей самой, и т.д., пока не после очередного вычитания не получилась единица. Сколько всего вычитаний было произведено?(3)