



Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2014 год

Победители и призеры олимпиады получают право участия в заключительном туре олимпиад школьников, дающих льготное поступление в ВУЗ.

11 класс

Математика

1. Найдите значение выражения $\frac{1}{\log_{\frac{x}{60}} e \left(\ln x - \log_{\frac{1}{60}} e \right)} + \frac{2 \ln 60}{\ln(60x)}$ при $x = 12$.

2. При каких значениях параметра a верно неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \left(\operatorname{arctg} \alpha + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \alpha \right) \geq \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \left(\frac{\operatorname{arcctg} \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)?$$

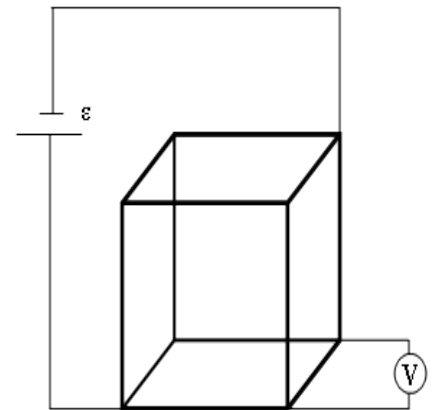
3. Дан тетраэдр $ABCD$. Через вершину A проведена плоскость α , которая делит BD точкой пересечения M в отношении $\frac{|DM|}{|MB|} = \frac{3}{4}$, а так же делит CD точкой пересечения N в отношении $\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{7}{5}$. Расстояние от точки O до плоскости BKD в три раза меньше, чем от вершины A до этой плоскости. Найти отношение объемов тетраэдра $DMNO$ и пирамиды $ABCNM$.

Физика

1. Обезьяна забралась на кокосовую пальму высотой $H = 30$ м, сорвала кокос массой $m = 1$ кг и хочет кинуть его своей приятельнице, находящейся на расстоянии $L = 40$ м от пальмы. Какую минимальную силу должна приложить при броске кокоса обезьяна, и под каким углом α к горизонту ей нужно бросать кокос, если длина ее руки $l = 50$ см. Примите $g = 10$ м/с², при броске обезьяна опирается спиной на ствол дерева.

2. Папарацци вооружился фотокамерой Nikon, устроенной на основе собирающей линзы с фокусным расстоянием 10 см и ПЗС матрицы из фотоэлементов. В режиме непрерывной фокусировки на движущемся объекте объектив камеры автоматически перемещается. Определить скорость перемещения объектива камеры v_{ob} , если кинозвезда проходит мимо папарацци со скоростью $v_0 = 1$ м/с под углом 30° к направлению фотографирования и в момент фотографирования находится на расстоянии 2 м от него.

3. Кубик сделан из 12 проволок с одинаковым сопротивлением. К противоположным вершинам куба подключена батарея с $\varepsilon = 10$ В. Определите напряжение U , которое покажет вольтметр.



Алгоритмы

1. На складе магазина “Шаман” лежат 2014 бубнов. Известно, что ровно через полтора часа после использования одного из них у человека начинается ужасная мигрень (назовем этот бубен “плохим”), тогда как ровно через полтора часа после использования любого из остальных повышается работоспособность (назовем эти бубны “хорошими”). Для проверки бубнов были привлечены 15 отважных программистов. До начала продаж бубнов всего два часа. Какое наименьшее количество бубнов необходимо забраковать, чтобы гарантированно оставить только “хорошие” экземпляры? Если человек одновременно подвергается воздействию “хорошего” бубна и “плохого”, то у него все равно будет мигрень.

2. Капитан Рейнольдс и его команда захватили у бандитов сейф с важными чертежами. Замок от сейфа содержит очень длинную клетчатую ленту, скрытой внутри замка. Снаружи у замка есть прозрачное окошко, сквозь которое можно увидеть содержимое одной клетки, и три кнопки: \triangleleft — передвигает

ленту на одну клетку влево; \triangleright — передвигает ленту на одну клетку вправо; \odot — ставит точку в пустую видимую клетку или стирает уже стоящую в видимой клетке точку. На ленте замка есть полоска точек длиной 100, расположенная достаточно далеко от края ленты. Замок открывается, если передвинуть эту полоску на 10 клеток вправо. Можно ли открыть сейф только этими действиями? (Если да, то опишите алгоритм действий, если нет, то докажите, почему.)

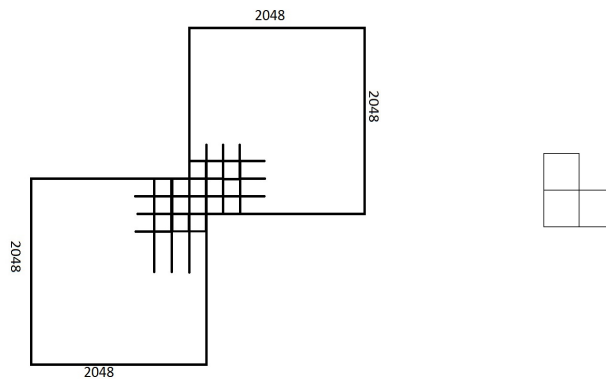


Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2014 год

7–8 класс

1. Три жителя страны Монтевердо А, В и С, один из которых является рыцарем, который всегда говорит правду, другой лжецом, который всегда лжет, третий хитрецом, который может говорить как правду, так и ложь, встретили мудреца D, который не знал, кто из них кто. На языке Монтевердо слова “си” и “ис” означают “да” и “нет”, но неизвестно, какое из двух слов что именно означает. Мудрец задал каждому из них один и тот же вопрос, получив от А ответ “си”, а от В и С ответ “ис”. Немного подумав, мудрец спросил у А и В, мог ли С ответить на его вопрос иначе. А сказал “си”, В сказал “ис”. Наконец мудрец спросил у А, что тот ответил на самый первый вопрос. А сказал: “си”. Дал ли хитрец хотя бы один верный ответ?
2. В МИ-5 принято нумеровать своих секретных агентов, начиная с двойного нуля (т.е. 001, 002 и т.д.). Начальство решило усовершенствовать эту систему. Цифру 7 объявили счастливой и перенумеровали агентов номерами, не содержащими цифру 7. После этого все нули в номерах заменили на семерки. Наибольший номер имеет агент 77118. Сколько семерок использовано для нумерации всех агентов МИ-5?
3. Докажите неравенство $x^2 + z^2 \geq 2y(x + z - y)$.
4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, такой что: $|AB| = 2$, $|AD| = 2\sqrt{15}$, $|BC| = |CD| = 5$, $|BD| = 8$. Найдите расстояние от точки C до окружности описанной около треугольника ABD .

5. Археологи обнаружили текст поселения горных троллей, написанный в виде (см. рисунок слева). Настоящий текст должен состоять из рун, нарисованных справа от текста. Этнографы хотят расшифровать текст, разделив его на руны. Если это невозможно, то текст поддельный. Является ли обнаруженный текст настоящим или это подделка?



6. Дан алгоритм:


```
1 Начало
2   Прочитать n
3   Присвоить ges значение 1
4   Для всех целых c таких что 2 <= c <= n
5       Прибавить к ges значение c + c - 1
6   Вывести ges на экран
7 Конец
```

- а) Что будет напечатано на экран при $n = 30$?
 - б) Опишите, что делает этот алгоритм для натуральных n .
7. Исследователь Кирилл Романович ловит лепрекона, живущего в узкой реке длиной 120 метров. Известно, что лепрекон чует золото на расстоянии до 30 метров включительно в любую сторону от своего жилища. У Кирилла Романовича есть 3 золотых монеты и устройство, показывающее местонахождение жилища лепрекона, если оно находится не дальше, чем в полуметре. Устройство хрупкое и использовать его можно только один раз. Монету же можно положить в любом месте и отвернуться — если лепрекон живет поблизости, он мгновенно утащит ее, если монета осталась лежать — лепрекон живет больше чем в 30 метрах (нетронутую монету можно использовать снова). Опишите, как Кириллу Романовичу найти жилище лепрекона.



Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2014 год

9–10 класс

- Докажите неравенство $x^8 + x^5y^3 + xy^7 \geq x^7y + x^3y^5 + y^8$ для всех $x > y > 0$.
- Дан треугольник ABC такой, что: $|AC| = 2\sqrt{7}$, угол B — прямой, угол $A = 30^\circ$, M — середина стороны BC . Из точки B опустили высоту BH . На стороне AC отметили точку N так, что $|AN| = |HM|$. Точку H отразили относительно AB в точку L . Найдите стороны треугольника MLN .
- Добрыня Никитич и Илья Муромец сломали китайскую стену на множество кирпичей-уголков (см рисунок) и решили сыграть в игру. Добрыня строит прямоугольные стены 2013×2014 любым способом, а Илья 4035×4036 , но без образования в них прямоугольников 2×3 из двух кирпичей-уголков. Выигрывает тот, кто построит большее количество разных по конфигурации стен. Кто из них выигрывает?

- У Нео и агента Смита проходит очередная битва. Агент Смит использовал числовую магию и запер противника в ловушку из чисел от 73 до 1522. Теперь Нео для того, чтобы выбраться из ловушки, нужно разбить эти числа на группы так, чтобы в каждой группе три наибольших числа были в 28 раз больше остальных. Удастся ли ему выбраться из ловушки и продолжить битву?
- На складе магазина “Шаман” лежат 2014 бубнов. Известно, что ровно через полтора часа после использования одного из них у человека начинается ужасная мигрень (назовем этот бубен “плохим”), тогда как ровно через полтора часа после использования любого из остальных повышается работоспособность (назовем эти бубны “хорошими”). Для проверки бубнов были привлечены 15 отважных программистов. До начала продаж бубнов всего два часа. Какое наименьшее количество бубнов необходимо забраковать, чтобы гарантированно оставить только “хорошие” экземпляры? Если человек одновременно подвергается воздействию “хорошего” бубна и “плохого”, то у него все равно будет мигрень.
- Дан алгоритм:
 - Начало
 - Прочитать n
 - Присвоить l значение 0
 - Присвоить r значение n
 - Пока $l + 0.01$ меньше чем r
 - Начало цикла
 - Присвоить m значение $(l+r)/2$
 - Если m меньше корня из n то
 - Присвоить l значение m
 - Иначе
 - Присвоить r значение m
 - Конец цикла
 - Вывести m на экран
 - Конец
 - Что будет напечатано на экран при $n = 4$?
 - Опишите, что делает этот алгоритм для натуральных $n > 2$.
- Капитан Рейнольдс и его команда захватили у бандитов сейф с важными чертежами. Замок от сейфа содержит очень длинную клетчатую ленту, скрытой внутри замка. Снаружи у замка есть прозрачное окошко, сквозь которое можно увидеть содержимое одной клетки, и три кнопки: \triangleleft — передвигает ленту на одну клетку влево; \triangleleft — передвигает ленту на одну клетку вправо; \odot — ставит точку в пустую видимую клетку или стирает уже стоящую в видимой клетке точку. На ленте замка есть полоска точек длиной 100, расположенная достаточно далеко от края ленты. Замок открывается, если передвинуть эту полоску на 10 клеток вправо. Можно ли открыть сейф только этими действиями? (Если да, то опишите алгоритм действий, если нет, то докажите, почему.)