III заочный тур. 8-9 класс.

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $1 < a < b + c < a + 1$ и $b < c$. Докажите, что $b < a$.(2)

2. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые – нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?(2)

3. На доске написано несколько вещественных чисел, сумма которых равна 2000. Докажите, что можно стереть несколько чисел (возможно, ни одного) так, что сумма оставшихся чисел будет равна полусумме модулей первоначальных чисел, увеличенной на 1000.(2)

4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили такие точки K и L соответственно, что прямая KL параллельна BC и при этом $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.(3)

5. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$. (3)

6. Бабушка купила для троих внуков 10 одинаковых апельсинов и хочет раздать их так, чтобы младшему досталось не меньше, чем среднему, среднему – не меньше, чем старшему, а старшему досталось хоть что-нибудь. Сколько вариантов дележа возможно?(1)

7. Дан треугольник ABC площади 1. P – середина AC, M – точка пересечения медиан исходного треугольника, а EH – средняя линия треугольника CMP, соответствующая стороне MP. Найти площадь четырехугольника $MEHP$.(2)

8. Верно ли, что число $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1$ является полным квадратом?(3)

9. Имеются числа 1, 2, 3, $\ldots$, 10. Сколькими способами их можно расставить в ряд так, что сумма чисел, стоящих на четных местах, была бы больше суммы чисел, стоящих на нечетных?(4)

10. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd = 1$.(2)

III заочный тур. 8-9 класс.

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $1 < a < b + c < a + 1$ и $b < c$. Докажите, что $b < a$.(2)

2. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые – нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?(2)

3. На доске написано несколько вещественных чисел, сумма которых равна 2000. Докажите, что можно стереть несколько чисел (возможно, ни одного) так, что сумма оставшихся чисел будет равна полусумме модулей первоначальных чисел, увеличенной на 1000.(2)

4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили такие точки K и L соответственно, что прямая KL параллельна BC и при этом $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.(3)

5. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$. (3)

6. Бабушка купила для троих внуков 10 одинаковых апельсинов и хочет раздать их так, чтобы младшему досталось не меньше, чем среднему, среднему – не меньше, чем старшему, а старшему досталось хоть что-нибудь. Сколько вариантов дележа возможно?(1)

7. Дан треугольник ABC площади 1. P – середина AC, M – точка пересечения медиан исходного треугольника, а EH – средняя линия треугольника CMP, соответствующая стороне MP. Найти площадь четырехугольника $MEHP$.(2)

8. Верно ли, что число $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1$ является полным квадратом?(3)

9. Имеются числа 1, 2, 3, $\ldots$, 10. Сколькими способами их можно расставить в ряд так, что сумма чисел, стоящих на четных местах, была бы больше суммы чисел, стоящих на нечетных?(4)

10. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd = 1$.(2)
