



Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2013 год

Победители и призеры олимпиады получают право участия в заключительном туре олимпиад школьников, дающих льготное поступление в ВУЗ.

11 класс

Математика

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2(x + 40^\circ) \cdot \sin(50^\circ - x) - \cos(50^\circ - x) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(-x^2 + 9x + 36)(4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 2^3)}{\log_3^2 x + 3 \log_3 x + 2} \geq 0.$$

3. Вершины правильного треугольника находятся на сторонах AB , CD и EF правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что все такие треугольники имеют общий центр.

Физика

1. Шарик для настольного тенниса падает с высоты $h_1 = 20$ см, на высоте $h = 0$ игрок ударяет по нему снизу вверх, после чего шарик подлетает на высоту $h_2 = 45$ см. Найдите скорость V_0 ракетки в момент удара. Удар считать абсолютно упругим. Масса шарика $m_b \ll M_r$ массы ракетки. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.
2. Какое расстояние L сможет проехать легковой автомобиль с выключенным двигателем по ровной твердой асфальтовой дороге, если его начальная скорость $v_0 = 72 \text{ км/ч}$, масса вместе с водителем составляет $m = 1200 \text{ кг}$? Колеса автомобиля накачаны до избыточного давления $p_0 = 300 \text{ кПа}$ по сравнению с атмосферным. Ширина колеса $d = 10 \text{ см}$, радиус $R = 40 \text{ см}$. Трением в ходовой части и подшипниках автомобиля пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.
3. Ядро атома гелия налетает на покоящееся ядро атома водорода. Скорость ядра гелия на большом расстоянии от водорода была равна V_{He} . На какое минимальное расстояние r сблизятся ядра? Движение ядер происходит вдоль одной прямой, массу атомов считать пропорциональной числу содержащихся в них нуклонов, масса нуклона равна m , элементарный заряд равен e , электрическая постоянная равна k .

Алгоритмы

1. В здании парламента Сильварии сто этажей. У министра Негреско есть два одинаковых стеклянных шара. При падении с определенного этажа (и всех более высоких этажей) они разбиваются. Как ему определить этот этаж за 14 операций?
2. Правила лотереи “Ядрышко” таковы: в клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены перевернутые бочонки с числами, причём числа на бочонках в строках (слева направо) и столбцах (сверху вниз) расположены по возрастанию. Игроку необходимо за не более, чем 19 действий найти в этой таблице бочонок с числом 146 или гарантированно определить, что такого бочонка нет. Опишите алгоритм действий игрока.



Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2013 год

7–8 класс

1. Пятеро преподавателей обсуждали задачу численного интегрирования. Они сделали следующие предположения об ответе:

Михаил Сергеевич: “Если ответ существует, то он больше 3”.

Владимир Викторович: “Если ответ больше 4, то на самом деле его не существует”.

Нина Эдуардовна: “Ответ существует”.

Нина Петровна: “Ответ больше 4 или его не существует”.

Антон Иванович: “Ответ больше 3 и меньше 4, либо ответа не существует”.

Сергей Михайлович: “Ответ существует и равен π ”.

Известно, что среди предположений, высказанных женщинами, больше ошибочных, чем среди предположений, высказанных мужчинами. Существует ли ответ и чему он равен, если существует?

2. На необитаемом острове Иткаль капитан Шарп зарыл клад, причем он запомнил, что если от Южного Мыса пройти 70 метров налево по прямой вдоль берега, а затем пройти 110 метров по направлению к большой пальме, то окажешься на месте, где зарыл клад. Точно так же можно попасть на это место, если от Южного Мыса пройти 130 метров к пальме, а затем повернуть направо (на 90°) и пройти 10 метров. К следующему визиту Шарпа на остров, пальмы на месте не оказалось. Как капитану найти клад?
3. Найдите все пары целых чисел x и y для которых выполняется равенство $x^3 + y^3 = 2013$.
4. Изобразите на плоскости точки, координаты которых (x, y) удовлетворяют условию

$$2 \left| |x| - |y| \right| = \left| |x| + |y| \right|.$$

5. Дан алгоритм:

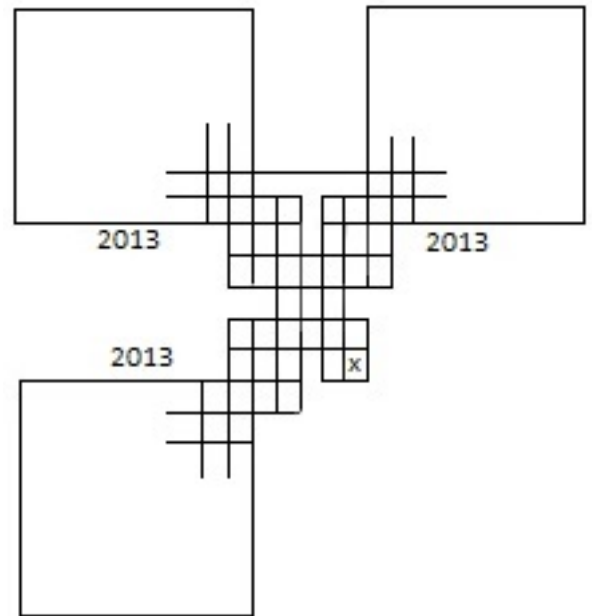
```
1 Начало
2   Прочитать a, b, n
3   Присвоить c значение a-b
4   Присвоить d значение pow(a,n)+pow(b,n)
5   Присвоить e значение 0
6   Для всех i от 0 до n-1
7     Увеличить e на pow(a,i)*pow(b,n-i-1)
8   Присвоить ans значение c*d*e
9   Вывести ans на экран
10 Конец
```

В алгоритме используется функция $\text{pow}(x, y)$, возвращающая значение x в степени y .

- а) Что будет выведено на экран при входных данных $a = 2, b = 1, n = 6$?
- б) Опишите, что делает этот алгоритм.
6. “Квадратомания” — это новая модная игра для двух игроков.

Поле для игры в “Квадратоманию” имеет такой вид, как изображено на рисунке справа: к квадрату 3×3 за угловые клетки прикреплено два квадрата 3×3 и один квадрат 2×2 , а к каждому квадрату 3×3 прикреплено ещё по квадрату 2013×2013 . В отмеченной точке стоит фишка.

Федя и Костя играют в “Квадратоманию”. По правилам игры за ход разрешается сдвинуть фишку на одну клетку влево, вверх или влево и вверх одновременно. Игроки ходят по очереди. Первым ходит Федя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может играть так, чтобы выиграть, независимо от действий противника?



- В здании парламента Сильварии сто этажей. У министра Негреско есть два одинаковых стеклянных шара. При падении с определенного этажа (и всех более высоких этажей) они разбиваются. Как ему определить этот этаж за 20 операций?



Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2013 год

9–10 класс

1. Последовательность целых чисел a_n удовлетворяет соотношению $a_{n+1} = a_n^3 + 2013$. Докажите, что не более двух членов последовательности являются точными квадратами целых чисел.
2. Про положительные вещественные числа x, y, z, t известно, что $xyzt \geq 1$. Докажите, что

$$(x + 3)(y + 3)(z + 3)(t + 3) \geq 256.$$

3. Натуральное число n называется гордым, если приписывание его к любому натуральному числу справа даёт число, делящееся на n . Найдите все гордые числа.
4. На плоскости, одна внутри другой, изображены две окружности. Постройте при помощи циркуля и линейки такую точку O , что одна окружность получается из другой при помощи гомотетии с центром в точке O .
Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет на месте точку O , и всякой точке M сопоставляет такую точку M' на луче OM , что $|OM'| = k|OM|$.
5. Дана функция $f(x)$. Известно, что $f(1) = 0$ и $f(2) = 2$. Кроме того, $\frac{f(x)}{x} = -xf\left(\frac{1}{x}\right)$ для любых $x \neq 0$, а также $f(xy) = -2f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f(y) - 2f(x) \cdot f\left(\frac{y}{2}\right)$ для любых x и y . Докажите, что

$$f(x) \leq |x|.$$

6. Дан алгоритм:

```
1 Начало
2   Прочитать a, b, n
3   Присвоить c значение a-b
4   Присвоить d значение row(a,n)+row(b,n)
5   Присвоить e значение 0
6   Для всех i от 0 до n-1
7     Увеличить e на row(a,i)*row(b,n-i-1)
8   Присвоить ans значение c*d*e
9   Вывести ans на экран
10 Конец
```

В алгоритме используется функция $\text{row}(x, y)$, возвращающая значение x в степени y .

- a) Что будет выведено на экран при входных данных $a = 2, b = 1, n = 6$?
 - б) Опишите, что делает этот алгоритм.
7. В здании парламента Сильварии сто этажей. У министра Негреско есть два одинаковых стеклянных шара. При падении с определенного этажа (и всех более высоких этажей) они разбиваются. Как ему определить этот этаж за 14 операций?
 8. Правила лотереи “Ядрышко” таковы: в клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены перевёрнутые бочонки с числами, причём числа на бочонках в строках (слева направо) и столбцах (сверху вниз) расположены по возрастанию. Игроку необходимо за не более, чем 19 действий найти в этой таблице бочонок с числом 146 или гарантированно определить, что такого бочонка нет. Опишите алгоритм действий игрока.